

Повторение за курс математики 5-6 класс

Натуральные числа – это числа, которые используют при счете предметов. **N** – множество натуральных чисел, оно бесконечно.
 $N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$. $n \in N$.

Целые числа – это натуральные числа, числа им противоположные и 0.
Z – множество целых чисел. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; m; \dots\}$. $m \in Z$

Противоположные числа – это те числа, которые отличаются только знаком (– *m*, число противоположное числу *m*).

Рациональные числа – это число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$ (*m* – целое число), $n \in N$ (*n* – натуральное число). **Q** – множество рациональных чисел.

Любое целое число можно представить в виде дроби: $m = \frac{m}{1}$.

Единицу можно представить в виде дроби с любым знаменателем, кроме 0: $1 = \frac{m}{m}$.

Примеры рациональных чисел: $15 = \frac{15}{1}$; $0 = \frac{0}{101}$; $-9 = \frac{-9}{1}$; $7\frac{4}{5} = \frac{39}{5}$;
 $-6,14 = \frac{-614}{100} = \frac{-307}{50}$

Компоненты действий

Сложение	Вычитание
$I \text{ слагаемое} + II \text{ слагаемое} = \text{сумма}$ $I \text{ слагаемое} = \text{сумма} - II \text{ слагаемое}$ $II \text{ слагаемое} = \text{сумма} - I \text{ слагаемое}$	$\text{уменьшаемое} - \text{вычитаемое} = \text{разность}$ $\text{уменьшаемое} = \text{разность} + \text{вычитаемое}$ $\text{вычитаемое} = \text{уменьшаемое} - \text{разность}$
Умножение	Деление
$I \text{ множитель} \cdot II \text{ множитель} = \text{произведение}$ $I \text{ множитель} = \text{произведение} : II \text{ множитель}$ $II \text{ множитель} = \text{произведение} : I \text{ множитель}$	$\text{делимое} : \text{делитель} = \text{частное}$ $\text{делимое} = \text{частное} \cdot \text{делитель}$ $\text{делитель} = \text{делимое} : \text{частное}$

Обыкновенная дробь -

это число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$ (*m* – целое число), $n \in N$ (*n* – натуральное число). Черта дроби означает действие деления.

Дробь называется **правильной**, если числитель меньше знаменателя.
Дробь называется **неправильной**, если числитель больше знаменателя.

Дробь не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и тоже число, отличное от нуля. (Основное свойство дроби)

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}$$

Чтобы в **неправильной дроби выделить целую часть**, надо разделить числитель на знаменатель “уголком”. Частное от деления – это будет целая часть новой дроби, остаток – числитель, а знаменатель остается прежним.

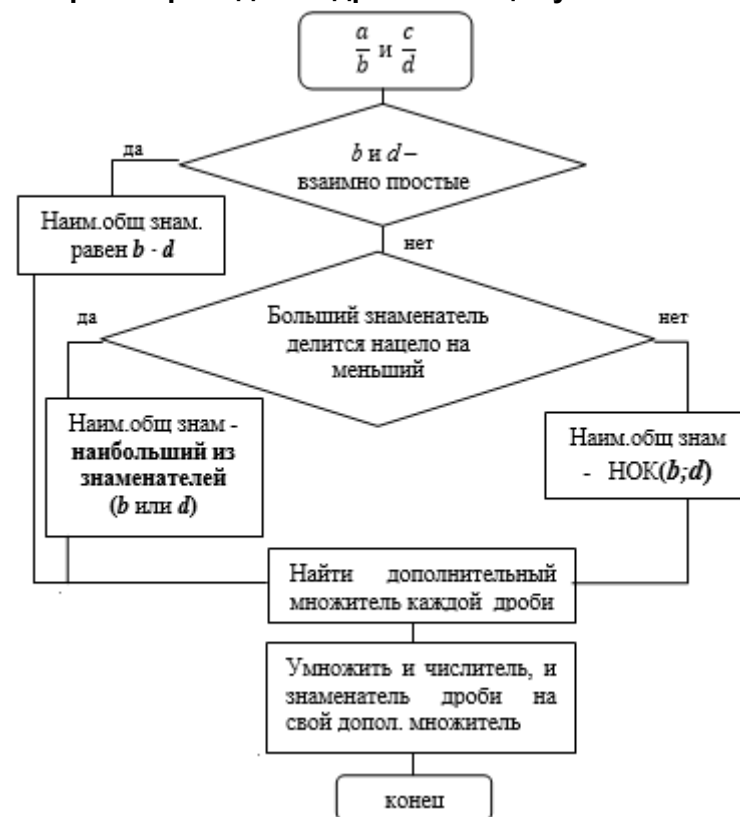
Пример: $\frac{17}{13} = 1\frac{4}{13}$.

$$\begin{array}{r} -17 \quad | 13 \\ \underline{13} \quad | 1 \\ 4 \end{array}$$

Чтобы **перевести целую дробь в неправильную**, надо знаменатель умножить на целую часть и прибавить числитель. Знаменатель оставить прежним.

Пример: $8\frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{42}{5}$

Алгоритм приведения дроби к общему знаменателю



Числа называют **взаимно простыми**, если не имеют общих делителей, кроме единицы.

Чтобы **найти дополнительный множитель**, надо новый знаменатель разделить на старый знаменатель.

Чтобы **сложить(отнять) две дроби с общими знаменателями**, надо сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.

Пример: $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{2+5}{11} = \frac{7}{11}$.

Чтобы **отнять дробь от единицы**, надо единицу представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой равен знаменателю дроби.

Пример: $1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Чтобы **сложить дробь с натуральным числом**, надо записать ее после натурального числа без пробелов.

Пример: $3 + \frac{5}{11} = 3\frac{5}{11}$.

Алгоритм сложения, вычитания правильных дробей

Шаги:	Пример:
1.Найти общий знаменатель.	$\frac{14}{15} + \frac{5}{12} =$ $\frac{3 \cdot 14}{3 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 12}$
2. Найти дополнительный множитель к каждой дроби.	$= \frac{14}{15} + \frac{5}{12} =$ $\frac{3 \cdot 14}{3 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 12}$
3. Перемножить числители с их дополнительными множителями и записать их в числителе, между числами поставить знаки, соответствующие знакам между дробями.	$= \frac{56 + 25}{60} =$
4. Выполнить действия в числителе.	$= \frac{81}{60} =$
5. При необходимости дробь сократить и выделить целую часть.	$= \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$.

Чтобы **умножить дробь на дробь**, нужно числитель умножить на числитель, а знаменатель на знаменатель, при необходимости сократить.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Пример: $\frac{9}{25} \cdot \frac{5}{12} = \frac{9^3 \cdot 5^1}{25_5 \cdot 12_4} = \frac{3}{20}$.

Числа m и $\frac{1}{m}$ называются **взаимно обратными числами**.
 $m \cdot \frac{1}{m} = 1$. Пример: 5 и $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$

Чтобы **разделить две обыкновенные дроби**, надо первую дробь умножить число, обратное второй дроби.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Пример: $\frac{15}{21} : \frac{5}{14} = \frac{15^3 \cdot 14^2}{21_3 \cdot 5_1} = \frac{2}{1} = 2$.

Сравнение дробей

- Чтобы сравнить дроби с **разными знаменателями**, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями
- (т.е. та дробь будет больше, у которой числитель больше).
- Из двух дробей с одинаковыми числителями **больше** та, знаменатель которой меньше.

Смешанные числа

$3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$ – смешанное число

Целая часть

Дробная часть

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

1. привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
2. отдельно выполнить действия отдельно целых частей и дробных частей;
3. если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить ее к полученной целой части.

Чтобы **умножить (разделить) смешанные числа** надо их записать в виде неправильной дроби, а затем воспользоваться правилом умножения (деления) дробей.

Десятичная дробь -

это дробь, у которой знаменатель - единица с нулями (т.е. 10, 100, 1000 и т.д.).

Такую дробь записывают в строчку, отделяют запятой целую часть от дробной, а количество нулей в знаменателе определяет количество цифр после запятой.

Правила

- Если к десятичной дроби **справа приписать** любое количество **нулей**, то **дробь не изменится**.
- Если десятичная дробь **оканчивается нулями**, то эти **нули можно отбросить**, при этом получится дробь, равная данной.
- Из двух дробей больше та, у которой **целая часть** больше.
- Если у дробей целая часть одинаковая, то сравниваются их дробные части. Для сравнения дробной части надо сначала **уравнять количество цифр после запятой**, приписав нужное количество нулей к одной из дробей.

Чтобы **сложить (отнять) десятичные дроби**, надо:

- Уравнять количество знаков после запятой;
- Записать в столбик, разряд под разрядом, запятая под запятой;
- Сложить числа как натуральные, не обращая внимание на запятую;
- В результате, запятую поставить под запятой.

Чтобы **умножить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- Записать множители в столбик, последний разряд под последним разрядом;
- Умножить числа как натуральные, не обращая внимание на запятую;
- В результате, справа налево отделить запятой столько цифр, сколько цифр после запятой в десятичной дроби.

Пример:

$$\begin{array}{r} 183 \\ \times 12 \\ \hline 366 \\ + 183 \\ \hline 2196 \end{array}$$

Чтобы **умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую на столько цифр вправо, сколько нулей стоит в множителе после единицы.

Примеры:

$$61,039 \cdot 100 = 6103,9$$

$$5,2 \cdot 1000 = 5,200 \cdot 1000 = 5200$$

$$0,038 \cdot 1000 = 0038 = 38$$

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:

- Записать делимое и делитель "уголком";
- Выполнить деление также, как и деление натуральных чисел;
- Сразу как закончилось деление целой части, в частном ставят запятую.
- Если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых.

Примеры:

$$\begin{array}{l} 1) 19,2 : 8 = 2,4 \\ 2) 2,88 : 4 = 0,72 \\ 3) 45 : 6 = 7,5 \end{array}$$

Чтобы **делении десятичной дроби на 10, 100, 1000** и т. д., надо в этой дроби перенести запятую на столько цифр влево, сколько нулей стоит в делителе после единицы.

Примеры:

$$3,481 : 100 = 0,03481$$

$$43 : 100 = 0,043$$

Чтобы **умножить число на 0,1; 0,01; 0,001** и т.д., надо перенести запятую влево на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе 0,1; 0,01 и т.д.

Примеры:

$$\begin{array}{l} 233,6 \cdot 0,01 = 2,336 \\ 4,7 \cdot 0,001 = 0,0047 \\ 5 \cdot 0,0001 = 0,0005 \\ 30 \cdot 0,1 = 3,0 = 3 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:

- Записать множители в столбик, последний разряд под последним разрядом;

- 2) Умножить числа как натуральные, не обращая внимание на запятую;
- 3) В результате, отделить запятой столько цифр справа налево, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.
- 4) Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут нули.

Примеры: 1) $43,2 \cdot 52 = 2246,4$

$$\begin{array}{r} \times 43,2 \text{ 1 знак} \\ 52 \\ \hline + 864 \\ 2160 \\ \hline 2246,4 \text{ 1 знак} \end{array}$$

2) $2,45 \cdot 4,6 = 11,27$

$$\begin{array}{r} \times 2,45 \text{ 2 знака} \\ 4,6 \text{ 1 знак} \\ \hline + 1470 \\ 980 \\ \hline 11,270 \text{ 3 знака} \end{array}$$

3) $5700 \cdot 3,6 = 20520$

$$\begin{array}{r} \times 5700 \\ 3,6 \text{ 1 знак} \\ \hline + 342 \\ 171 \\ \hline 20520,0 \text{ 1 знак} \end{array}$$

4) $0,000024 \cdot 7,6 = 0,0001824$

$$\begin{array}{r} \times 7,6 \text{ 1 знак} \\ 0,000024 \text{ 6 знаков} \\ \hline + 304 \\ 152 \\ \hline 0,0001824 \text{ 7 знаков} \end{array}$$

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:

1. Записать пример в строку. Перенести в делимом и делителе запятую на столько цифр вправо, сколько цифр после запятой в делителе;
2. Записать действие "уголком" и выполнить как деление на натуральное число.

Пример: $12,096 : 2,24 = 1209,6 : 224 = 5,4$

$$\begin{array}{r} 1209,6 \quad 224 \\ 1120 \quad 5,4 \\ \hline 896 \\ -896 \\ \hline 0 \end{array}$$

Чтобы **разделить десятичную дробь на 0,1; 0,01; 0,001** и т.д., надо перенести в ней запятую вправо на столько цифр, сколько в делителе нулей перед единицей.

Примеры: $467 : 0,01 = 46700 : 1 = 46700$
 $87 : 0,0001 = 870000 : 1 = 870000$

Чтобы **округлить десятичную дробь**, надо:

1. Подчеркнуть (карандашом) цифру, округляемого разряда чертой.
2. Вертикальной чертой отделяем все цифры, стоящие справа от округляемого разряда.
3. Если справа от подчеркнутой цифры стоит цифра **0, 1, 2, 3** или **4**, то подчеркнутую цифру оставляем без изменений, а все цифры после вертикальной черты заменяем нулями или отбрасываем, если они стоят после запятой.
4. Если справа от подчеркнутой цифры стоит цифра **5, 6, 7, 8** или **9**, то подчеркнутую цифру увеличиваем на 1, а все цифры после вертикальной черты заменяем нулями или отбрасываем, если они стоят после запятой.

Примеры: Округлить до сотен:

$$545,23 \approx 500,00 = 500;$$

$$7891,3 \approx 7900,0 = 7900.$$

Округлить до десятых: а)

$$8 \approx 3,4;$$

$$56,83 \approx 56,8;$$

$$78,953 \approx 79,0 = 79.$$

!!! Любую конечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, но не все обыкновенные дроби можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Правило 1: Чтобы **обыкновенную дробь** представить в виде **десятичной**, можно разделить "уголком" числитель на знаменатель.

Например, если делить 2 на 3, то сначала получим ноль целых, потом шесть десятых, а затем при делении всё время будет повторяться остаток 2, а в частном — цифра 6.

Такое деление закончить без остатка невозможно и поэтому дробь $\frac{2}{3}$ нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. $\frac{2}{3} = 0,666...$

Опр.: Если в записи десятичной дроби одна цифра или группа цифр начинают повторяться бесконечно много раз, такую дробь называют **периодической дробью**.

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6) \text{ читают "нуль целых и шесть в периоде"}$$

$$\frac{7}{15} = 0,4666... = 0,4(6) \text{ читают "нуль целых четыре десятых и шесть в периоде"}$$

Правило 2: Чтобы **обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную**, достаточно записать числителем ее период, а в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде.

$$0,(\overline{3}) = 0, \underbrace{(\overline{3})}_{1 \text{ цифра}} = \frac{3}{\underbrace{9}_{1 \text{ штука}}} = \frac{1}{3}; \quad 4,(\overline{02}) = 4, \underbrace{(\overline{02})}_{2 \text{ цифры}} = 4 \frac{2}{\underbrace{99}_{2 \text{ штуки}}}$$

Правило 3: Чтобы **записать смешанную периодическую дробь в виде обыкновенной**, надо из числа, стоящего до второго периода вычесть число, стоящее до первого периода, результат записать в **числителе**; в **знаменателе** записать число, содержащее столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей в конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Пример: Запишем дробь 2,34(2) в виде обыкновенной

$$2,34(2) = 2, \overbrace{34}^{2 \text{ цифры до периода}} \underbrace{(\overline{2})}_{1 \text{ цифра в периоде}} = \frac{342 - 34}{900} = \frac{308}{900} = \frac{77}{225}$$

Правило 4: Обыкновенную дробь $\frac{q}{p}$ обратима в конечную десятичную дробь, если ее знаменатель можно представить в виде 2^n или 5^m или $2^n \cdot 5^m$ и других множителей в знаменателе нет.

Пример: 1) $\frac{3}{20}$ - можно, $20 = 2^2 \cdot 5^1$. 2) $\frac{7}{30}$ - нельзя, $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$.

Сравнение рациональных чисел

- Любое **положительное** число **больше нуля**.
- Любое **отрицательное** число **меньше нуля**.
- Любое **отрицательное** число **меньше** любого **положительного**.
- Из двух **отрицательных** чисел **больше** то, **модуль** которого **меньше**.

Правила действий рациональных чисел

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, нужно сложить их модули и перед суммой поставить знак « – ».

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, нужно из большего модуля вычесть меньший и поставить знак большего модуля.

Сумма противоположных чисел равна нулю. $m + (-m) = 0$

Чтобы **умножить (разделить) два числа с разными знаками**, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и перед результатом поставить знак “ – ”

- 1) Поставить знак минус;
- 2) Выполнить действие с модулями.

Пример: 1) $- 25 \cdot 0,4 = - 10$;

$$2) \frac{4}{5} : (-\frac{12}{35}) = -\frac{4 \cdot 35}{5 \cdot 12} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}.$$

Чтобы **умножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и перед результатом поставить знак “ + ”

- 1) Поставить знак плюс или не ставить знака;
- 2) Выполнить действие с модулями.

Пример: 1) $- 24 \cdot (- 0,5) = 12$

$$2) -\frac{4}{5} : (-\frac{12}{35}) = \frac{4 \cdot 35}{5 \cdot 12} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Схемы произведения и частного рациональных чисел

«+» · «+» = «+»	«+» : «+» = «+»
«-» · «-» = «+»	«-» : «-» = «+»
«+» · «-» = «-»	«+» : «-» = «-»
«-» · «+» = «-»	«-» : «+» = «-»